KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Człowiek – najlepsza inwestycja

FENIKS

- długofalowy program odbudowy, popularyzacji i wspomagania fizyki w szkołach w celu rozwijania podstawowych kompetencji naukowo-technicznych, matematycznych i informatycznych uczniów

Pracownia Fizyczna

ćwiczenie PF-7:

Nie od razu piramidy zbudowano, czyli o fizyce maszyn prostych

Bartosz Such

Instytut Fizyki im. Mariana Smoluchowskiego

Uniwersytet Jagielloński

Wersja 1.0, marzec 2010

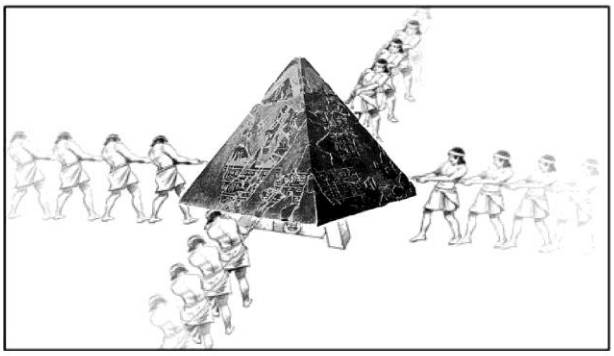
Zawarte w tym opracowaniu materiały przeznaczone są do wspomagania pracy nauczycieli i uczniów w czasie zajęć pozalekcyjnych w szkołach biorących udział w projekcie edukacyjnym FENIKS. Mają na celu ułatwienie przygotowania do zajęć laboratoryjnych w I Pracowni Fizycznej IF UJ.

http://feniks.ujk.kielce.pl/

feniks@th.if.uj.edu.pl

Celem ćwiczenia jest poznanie podstawowych praw statyki oraz zasady działania niektórych maszyn prostych.

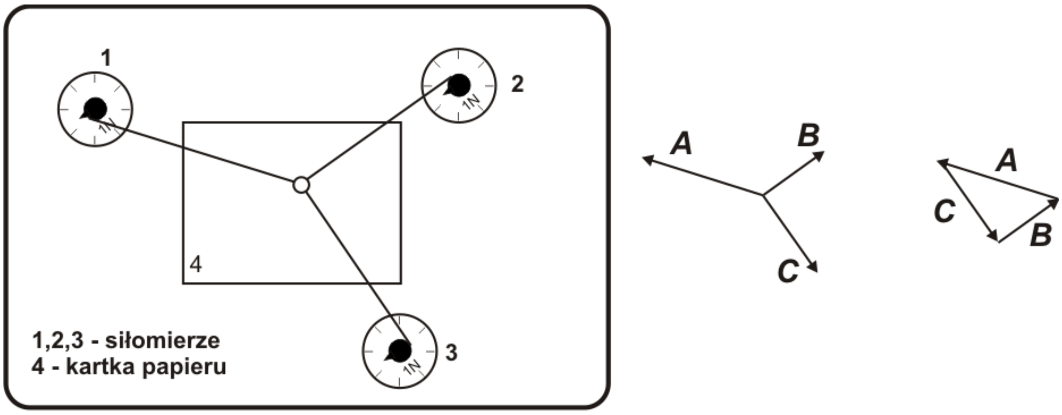
I. Równowaga sił, wektory



Aby móc zbudować cokolwiek dużego, na przykład piramidę musimy zrozumieć jak działają siły i jak możemy sobie je zobrazować. Zatem w tej części ćwiczenia zajmiemy się równowagą i opisem sił.

Potrzebujemy: tablicę magnetyczną, którą kładziemy płasko na stole, trzy siłomierze, kółeczko, o które będziemy zahaczać linki siłomierzy, kartkę papieru, którą przymocujemy do tablicy magnesami, ołówek, ekierkę.

Montujemy układ podobny do tego, który jest przedstawiony na Rys. 1. Linki powinny być napięte, a siłomierze powinny pokazywać siły poniżej 1N. Kartka papieru powinna być przymocowana magnesami.



Rys. 1. Schemat eksperymentu, możliwy układ wektorów sił uzyskany w eksperymencie oraz te same wektory narysowane tak, by sprawdzić jaka jest ich suma.

1) przy pomocy ekierki proszę narysować na kartce papieru linie wzdłuż naprężonych linek

2) proszę zanotować siłę pokazywaną przez każdy z siłomierzy

Pomiar proszę powtórzyć dla trzech różnych ustawień siłomierzy na tablicy. Jakie są niepewności pomiarowe?

Opracowanie:

1) Proszę przedłużyć linie, wzdłuż których układały się linki tak aby zobaczyć jak się przecinają

2) Od miejsca przecięcia prostych proszę narysować odcinki o długościach proporcjonalnych do sił zmierzonych w danym kierunku (np. 1N =10 cm, zatem siła 0.67N będzie odpowiadała długości 6.7 cm).

3) Proszę narysować grot strzałki w tą stronę, w którą działała siła (czyli w którą stronę kółko było ciągnięte przy pomocy danej linki)

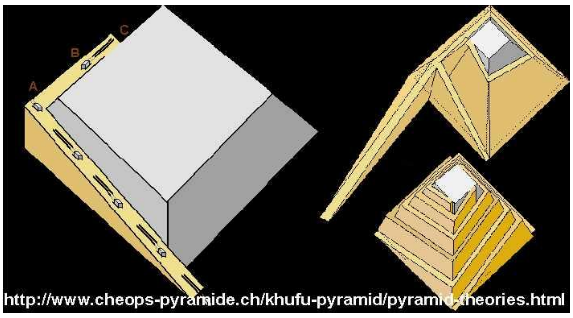
Dzięki tym zabiegom udało nam się powiedzieć wszystko, co było konieczne do opisania sił działających na kółko. Innymi słowy udało nam się stworzyć wektory sił (w naszym przypadku trzy wektory, bo mieliśmy trzy linki). Proszę zwrócić uwagę, że aby w pełni zrozumieć jak siły działają, musieliśmy dla każdej z nich podać kilka parametrów: punkt przyłożenia (w naszym przypadku jest to punkt, w którym przecinają się wszystkie proste), kierunek (czyli prostą narysowaną wzdłuż napiętej linki), zwrot (czyli określić w którą stronę linka ciągnęła kółko i odpowiednio narysować grot strzałki) oraz wartość (czyli odczytać wskazanie siłomierza jak duża była ta siła). Jeżeli pominiemy którykolwiek z tych parametrów, to opis nie będzie kompletny i nie będziemy w stanie nic powiedzieć o tym jak ciało będzie się poruszać (bądź nie) na podstawie takiego opisu.

4) Proszę sprawdzić (np. konstrukcyjnie), czy z tych trzech wektorów da się zbudować trójkąt

Aby sprawdzić czy da się z nich otrzymać trójkąt trzeba sobie wyobrazić, że są to np. patyki (tylko ze strzałką w jedną stronę) i można je przesuwać po kartce. Jeden z wektorów pozostanie tam gdzie był, początek drugiego zacznie się tam, gdzie jest grot strzałki pierwszego, a trzeci połączy grot drugiego wektora z początkiem pierwszego. Jeśli się udało, to znaczy że udało się Wam *dodać* te trzy wektory! Dodawanie wektorów często w praktyce po prostu polega na rysowaniu dodawanych wektorów jeden po drugim. Wynikiem dodawania wektorów musi być inny wektor (tak jak wynikiem dodawania liczb np. 12+23 jest inna liczba, 35). Jeśli narysowaliście na kartce – tak jak przed chwilą, jeden za drugim - wektory, które dodajecie, to wektor, który jest wynikiem dodawania będzie się zaczynał tam gdzie zaczyna się pierwszy dodawany wektor, a kończył tam, gdzie jest grot ostatniego dodawanego wektora. Oczywiście, warto wiedzieć jak się oznacza takie operacje. Wektory zwykle oznacza się literami ze strzałką ponad literą np. $\vec{A}, \vec{B}\ldots$ itd., często jednak w tekście wektory oznacza się literami wytłuszczonymi: ***A***, ***B***... itd. Zatem wykonaliśmy operację ***A***+***B***+***C*** = ***D***. Oczywiście dodawanie wektorów, podobnie jak dodawanie liczb jest przemienne. To znaczy, że nie ma znaczenia w jakiej kolejności rysujemy dodawane wektory, wynik zawsze będzie taki sam (czyli ***A***+***B***+***C*** = ***A***+***C***+***B*** = ***C***+***A***+***B*** = itd).

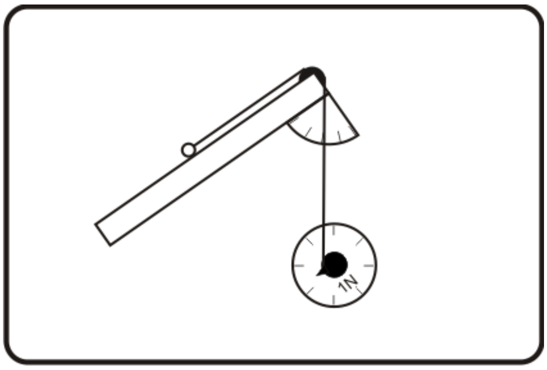
Ale w naszym przypadku dodane wektory utworzyły zamkniętą figurę! Zatem wynikiem dodawania w naszym przypadku jest wektor zerowy, ***A***+***B***+***C*** = ***0***! Czyli, mimo, że trzy sznurki ciągną kółko każdy w swoją stronę, wypadkowa siła jest równa zeru, siły się równoważą! I to jest wyjaśnienie, dlaczego kółko się nie rusza – wynika to z I Zasady Dynamiki Newtona: Jeśli na ciało nie działa żadna siła, lub siły, które się równoważą to ciało spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym.

II. Równia pochyła



Wciąganie ciężkich kamieni wysoko na piramidę nie było łatwym zadaniem. Piramidon piramidy (czyli element, który wieńczył piramidę, na obrazku po lewej) często ważył kilka ton. Trzeba go było jakoś na górę wciągnąć. Budowniczowie ułatwili sobie pracę budując wokół wznoszonej piramidy rampę, która w uproszczeniu była równią pochyłą. Jak dokładnie ta rampa wyglądała nie wiemy, ale zasada działania pozostaje ta sama.

Potrzebujemy: tablicę magnetyczną stojącą pionowo, równię pochyłą montowaną na magnesach, klocek z linką, siłomierz



Rys. 2. Schemat montażu równi pochyłej.

Montujemy równię na tablicy, linkę klocka montujemy na siłomierzu.

1) ważymy klocek, wieszając go na siłomierzu

2) kładziemy klocek na równi – patrz rysunek

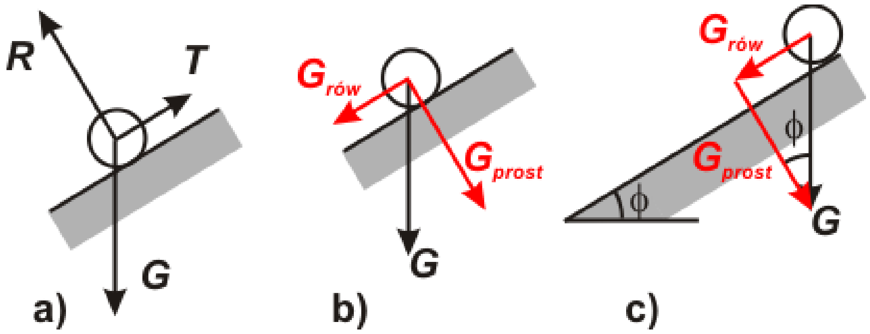
3) zmieniając nachylenie równi co 10 stopni, zaczynając od równi stojącej pionowo zapisujemy wskazania siłomierza

Zastanówcie się: jaka jest niepewność pomiarów? Czy warto wykonywać pomiary np. co 1 stopień? A co 30 stopni?

Opracowanie:

1) Narysujmy wykres zależności siły odczytanej na siłomierzu od kąta nachylenia równi pochyłej. Jaką funkcję przypomina ten wykres?

Wykres, który dostaliśmy nie jest linią prostą. Musimy zatem spróbować zrozumieć co to za funkcja i skąd się ona bierze. Na szczęście wiemy już z poprzedniej części doświadczenia, że muszą na nasz klocek działać siły, które się równoważą. Spróbujmy zatem wymyślić, jakie siły działają na klocek. Na pewno jest to siła ciężkości ***G***, która działa pionowo w dół. Jest jeszcze naprężenie linki ***T***. Ale to nie wystarcza – potrzebna nam jeszcze jedna siła, która pomogłaby zachować równowagę. Jeśli przyjrzymy się badanemu układowi, zauważymy, że to powierzchnia równi pochyłej podpiera klocek. Jaki jest kierunek tej siły? Płaska powierzchnia może oddziaływać tylko w kierunku prostopadłym (zjawiskiem tarcia się nie zajmujemy!). Zatem siła reakcji równi ***R*** działa w kierunku prostopadłym do powierzchni równi, ze zwrotem skierowanym ku górze, a wartość ma zawsze dokładnie taką aby zrównoważyć siłę nacisku klocka. Istniejąca równowaga sił przedstawiona jest na Rys. 3a). Teraz musimy się zastanowić jak zmieniają się te siły gdy zmieniamy kąt podniesienia równi. Oczywiście siła ciężkości ***G*** nie zmieni się, natomiast zmienia się naciąg linki (zmierzyliśmy to!) i musi się też zmieniać siła reakcji (choćby dlatego, że zmienia się płaszczyzna równi). Aby zrozumieć co się dzieje, musimy zrobić coś odwrotnego niż w poprzednim doświadczeniu – rozłożyć siłę na składowe. Polega to na znalezieniu takich dwóch wektorów składowych, których suma równa jest naszemu pierwotnemu wektorowi. Zwykle powinno nam to pomóc zrozumieć badany problem. W naszym przypadku rozłożymy na składowe siłę ciężkości ***G***. Jeśli przyjrzymy się geometrii naszego problemy, zobaczymy że dwie pozostałe siły zachowują względem powierzchni równi te same kierunki – linka ciągnie równolegle do powierzchni równi, siła reakcji jest zawsze prostopadła. Logiczne jest więc rozłożenie siły ciężkości ***G*** na dwie składowe – jedną równoległą $\boldsymbol{G}_{\text{rów}}$, drugą prostopadłą $\boldsymbol{G}_{\text{prost}}$ do powierzchni równi – porównaj Rys. 3b). Zauważcie, że skoro klocek nie porusza się, naprężenie linki ***T*** musi być równe składowej siły ciężkości równoległej do powierzchni równi $\boldsymbol{G}_{\text{rów}}$. Dlaczego? Dlatego, że gdyby wartość ***T*** była większa od wartości $\boldsymbol{G}_{\text{rów}}$ to klocek musiałby się poruszać w górę równi! Nie ma żadnej innej siły, która wpływa na ruch klocka wzdłuż równi, a klocek nie porusza się, zatem siły ***T*** i $\boldsymbol{G}_{\text{rów}}$ mają tą samą wartość i różnią się tylko zwrotem (czyli położeniem grotu strzałki). Innymi słowy $\boldsymbol{T} + \boldsymbol{G}_{\text{rów}} = \boldsymbol{0}$. Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla ***R*** i $\boldsymbol{G}_{\text{prost}}$. Co zatem mierzy siłomierz? Wartość naprężenia linki ***T***, a zatem pośrednio składową siły ciężkości, którą trzeba pokonać, aby pchnąć piramidion w górę. In równia leży bardziej płasko, tym ta siła jest mniejsza. Nic dziwnego zatem, że Egipcjanie użyli równi pochyłej w formie usypanych ziemnych ramp do transportu ciężkich elementów na duże wysokości. Zwróćcie uwagę jednak, że równia ma swoją wadę – im jest bardziej płaska, tym musi być dłuższa, aby dojść na tą samą wysokość.



Rys 3. a) siły działające na ciało na równi pochyłej; b) rozkład siły ciężkości na składowe; c) zależności między kątami

Jeśli jesteśmy dociekliwi, możemy obliczyć, jaką siłę powinien mierzyć siłomierz, czyli jaka jest składowa siły ciężkości równoległa do równi $\boldsymbol{G}_{rów}$. Popatrzmy na Rys. 3c). Wiemy, że $\boldsymbol{G}_{rów} + \boldsymbol{G}_{prost} = \boldsymbol{G}$. Tak w końcu rozkładaliśmy siłę ciężkości. Co więcej, wiemy, że $\boldsymbol{G}_{rów}$ i $\boldsymbol{G}_{prost}$ są do siebie prostopadłe. Czyli te trzy wektory tworzą trójkąt prostokątny, w którym $\boldsymbol{G}_{rów}$ i $\boldsymbol{G}_{prost}$ to przyprostokątne, a $\boldsymbol{G}$ to przeciwprostokątna. Kąt przy najniższym wierzchołku jest taki sam jak kąt podniesienia równi ϕ. (Jeśli kiedyś nie będziecie pewni który ta kąt wyobraźcie sobie jak się będą zmieniać te siły, gdy równia będzie coraz bardziej stroma – jeden z kątów trójkąta też będzie rosnąć – i to jest właśnie ten). Stosunek przyprostokątnej przeciwległej do kąta ϕ do przeciwprostokątnej jest równy funkcji sinus tego kąta, czyli:

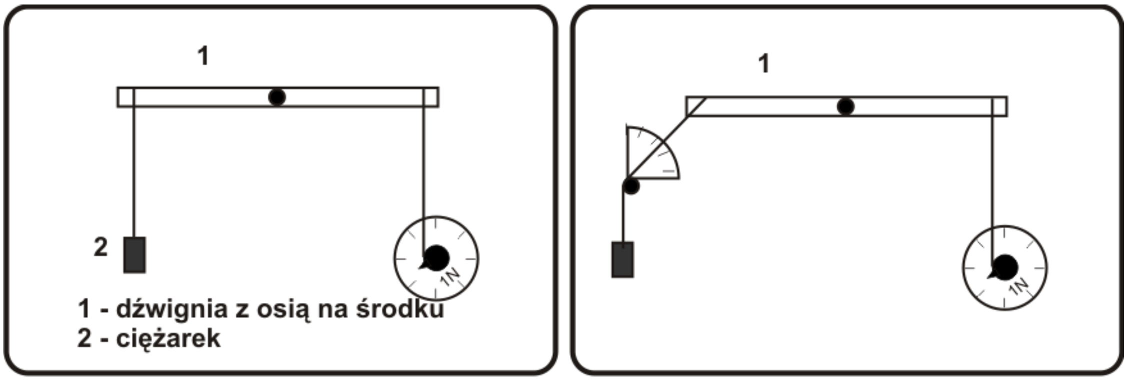
$$\frac{\left|\vec{G}_{rów}\right|}{\left|\vec{G}\right|} = \sin\phi \text{. Stąd mamy: } \left|\vec{G}_{rów}\right| = \left|\vec{G}\right|\sin\phi .$$

Zwróćcie uwagę, że we wzorach są tylko wartości wektorów. Zatem siłomierz powinien mierzyć siłę równą ciężarowi klocka pomnożonemu przez sinus kąta nachylenia równi. Sprawdźcie to - znacie ciężar klocka (to nie jest masa klocka, mierzona w kilogramach, a siła, z jaką ziemia przyciąga klocek). Na tym samym wykresie, na którym zaznaczaliście swoje wyniki pomiarów narysujcie funkcje f(ϕ) = $\left|\vec{G}\right|\sin\phi$. Zgadza się? A właściwie, czy zgadza się z dokładnością do niepewności pomiarowych?

III. Momenty sił

Wyobraźcie sobie, że dostaliście za zadanie postawić obelisk do pozycji pionowej. Zaczepiliście linę do jego czubka i ciągniecie z całych sił. I co? I zapewne nic – kamień ani drgnie. Problemem tu jest niewystarczający *moment siły* i tym pojęciem zajmiemy się teraz.

Potrzebujemy: tablicę magnetyczną stojącą pionowo, dźwignię, siłomierz, ciężarek na lince, kątomierz, bloczek (można wykorzystać w tym celu równię pochyłą, wykorzystaną wcześniej)



Rys. 4. Schemat montażu dźwigni

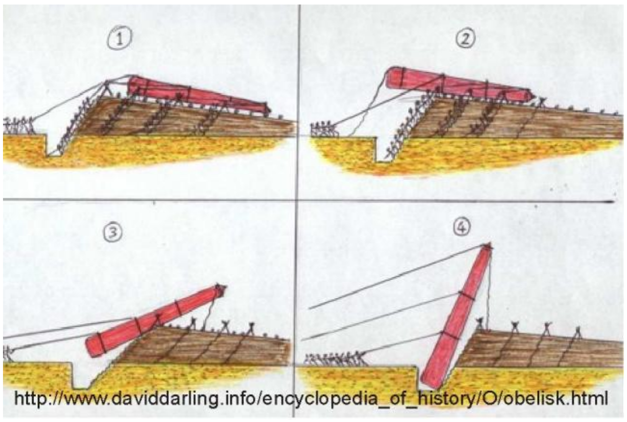
Montujemy dźwignię na tablicy. Na jednym jej końcu zawiesić ciężarek, na drugim przymocować linką siłomierz (punkty zaczepienia powinny być stałe i być w tej samej odległości od osi obrotu). Linka łącząca siłomierz z dźwignią musi być pionowa. Proszę ustawić układ tak, aby dźwignia była poziomo (Rys. 4. po lewej). Proszę odczytać wskazanie siłomierza. Następnie proszę zamontować bloczek, tak jak jest to przedstawione na Rys. 4. po prawej. Interesować nas będzie to jak się zmienia odczyt siły na siłomierzu w zależności od kąta ϕ, pod którym nachylony jest sznurek. Pomiary proszę robić co 10 stopni. Bardzo ważne jest, żeby przy każdym pomiarze dźwignia była poziomo a linka siłomierza – pionowo!

Opracowanie

1) Należy zrobić wykres zależności siły odczytanej z siłomierza od kąta nachylenia

O dziwo, wartość siły odczytanej z siłomierza nie jest stała, mimo że ciężarek nie zmieniał się. Musimy więc przeanalizować jak działają siły w tym przypadku. W porównaniu z poprzednimi eksperymentami mamy tu nową, istotną rzecz – oś obrotu, wokół której może się obracać dźwignia. My badamy ją, gdy spoczywa, znaczy to, że wszystkie siły się równoważą. Jaką rolę pełni oś? Jeśli na dźwignie, w dowolnym jej punkcie działałaby siła, prostopadła do dźwigni, dźwignia zaczęłaby się obracać. Jeśli natomiast pojawiłaby się siła do dźwigni równoległa – dźwignie by nie drgnęła. Oczywiście, oś musiałaby działać siłą reakcji, ale sama dźwignia nie zostałaby poruszona. Innymi słowy, obecność stałej osi obrotu powoduje, że dźwignia jest zupełnie nieczuła na siły działające do niej równoległe, a reaguje tylko na siły działające prostopadle do osi oraz dźwigni. Czyli wiemy juz, że będziemy musieli rozkładać siły na składowe równoległe do dźwigni i te do niej prostopadłe. W przypadku naszego eksperymentu naprężenie linki równe jest ciężarowi klocka ***G***. Możemy zatem narysować dwie składowe – równoległą do dźwigni $\boldsymbol{G_{rów}}$ i prostopadłą do niej $\boldsymbol{G_{prost}}$. Jak juz ustaliliśmy, składowa równoległa jest nieistotna z punktu widzenie dźwigni. Interesować nas będzie tylko składowa prostopadła. Podobnie jak w poprzednim doświadczeniu konstruujemy trójkąt prostokątny i zauważamy, że w tym przypadku składowa $\boldsymbol{G_{prost}}$ jest przyprostokątną przyległą do kąta ϕ, podczas gdy ***G*** jest przeciwprostokątną. Zatem stosunek długości $\boldsymbol{G_{prost}}$ i ***G*** jest równy funkcji cosinus kąta ϕ. Zatem $\left|\vec{G}_{prost}\right| = \left|\vec{G}\right|\cos\phi$. Wydaje się, wobec tego, że siłomierz powinien po prostu mierzyć siłę równą $\left|\vec{G}_{prost}\right| = \left|\vec{G}\right| \cos\phi$. Ale żeby być tego pewnym, musimy wykonać jeszcze jedno doświadczenie

Niemniej rozumiemy już, dlaczego nie udało się nam ruszyć obelisku. Osią obrotu była jego podstawa. Linę zaczepiliśmy na jego końcu i zaczęliśmy ciągnąć niemal wzdłuż osi obelisku! Zatem, mimo że siła była duża, moment siły był malutki i nie był w stanie ruszyć wielkiego i długiego kamienia. Trzeba zatem wymyślić sposób, aby zwiększyć moment siły – czyli aby możliwe było ciągnięcie obelisku pod większym kątem. Jeden z możliwych sposobów, w jaki Egipcjanie mogli to robić jest przedstawiony obok. Zauważcie że wykorzystuje również równie pochyłą.



IV. Dźwignia

Potrzebujemy: tablicę magnetyczną stojącą pionowo, dźwignię, siłomierz, ciężarek na lince,

Montujemy dźwignię na tablicy. Na jednym jej końcu proszę zawiesić ciężarek, do drugiego przymocować linkę siłomierza. Dźwignia musi być pozioma, a linka siłomierza pionowa. Proszę odczytać wskazanie siłomierza *F* oraz odległość od osi do punktu zaczepienia linki siłomierza *r*. Następnie proszę przesunąć siłomierz i linkę w stronę osi dźwigni i ponownie zmierzyć siłę. Pomiar powtórzyć dla wielu odległości pomiędzy osią a punktem zaczepienia linki. WAŻNE: dźwignia musi być przy każdym pomiarze pozioma, a linka pionowa!

Opracowanie

Dla każdego punktu zawieszenia obliczamy iloczyn wskazania siłomierza *F* oraz odległości od osi do punktu zaczepienia linki *r*. Wielkość ta nazywana jest momentem siły *M*. Tak naprawdę moment siły jest też wektorem ale dla potrzeb naszych eksperymentów możemy o tym zapomnieć, jeśli tylko pamiętamy, aby linka siłomierza była prostopadła do dźwigni, a dźwignia była pozioma. Widzimy, że dla każdego punktu iloczyn jest ten sam, a dźwignia pozostaje w bezruchu. Rozumiemy, że moment siły wywierany przez linkę siłomierza musi być równoważony przez moment siły działający na dźwignię z drugiej strony osi, dzięki temu że jest tam zawieszony ciężarek.

W doświadczeniu zmierzyliśmy kilkukrotnie moment siły. Możemy zatem jako ostateczny wynik podać wartość średnią tych pomiarów. Jako niepewność pomiarową należy podać wartość bezwzględną różnicy wartości średniej oraz najbardziej od niej odbiegającego wyniku.

Stąd można wyciągnąć kilka wniosków. Po pierwsze, jeśli na dźwigni zawiesimy w równej odległości od osi obrotu dwie masy, to dźwignia pozostanie poziomo tylko jeśli te masy będą sobie równe. Tak przecież działa waga szalkowa. A to pozwala nam wrócić do opracowania eksperymentu

III, gdzie nie wiedzieliśmy czy mierzona siła równa była $\left|\vec{G}_{prost}\right| = \left|\vec{G}\right|\cos\phi$. Otóż, jeśli odległość od osi do punktów zaczepienia obu linek była taka sama to tak, mierzona siła równa była $\left|\vec{G}_{prost}\right| = \left|\vec{G}\right|\cos\phi$, a siła, którą odczytaliśmy z siłomierza gdy linka z ciężarkiem zwisała pionowo była po prostu jego ciężarem. Pamiętajcie, że wagi tak naprawdę nie mierzą masy, a siłę z jaką Ziemia przyciąga dane ciało. Masę podajemy dzięki temu, że znamy przyspieszenie ziemskie i jest ono prawie stałe na całej Ziemi, zatem pozwala nam wyliczyć masę ciała z jego ciężaru. Ale elektroniczna waga sklepowa na Księżycu będzie dawać złe wyniki – tam ciążenie jest przecież dużo mniejsze.

Po drugie, widać na czym polega działanie dźwigni. Równowaga momentów sił pozwala zrównoważyć wielką siłę, ale wiszącą na krótkim ramieniu za pomocą dużo mniejszej siły, ale działającej na znacznie dłuższe ramię.

Po trzecie, w tym doświadczeniu wyliczaliście wynik, bazując na pomiarach dwóch wielkości fizycznych: *F* i *r*. Dla każdego punktu zaczepienia iloczyn $M = rF$ był stały. Teraz zmierzyliśmy tą wielkość wiele razy, wynik uśredniliśmy i wyznaczyliśmy niepewność maksymalną. Ale wyobraźmy sobie, że możemy zmierzyć obie wielkości jednokrotnie. I mamy dwa przypadki (i) bardzo dokładny siłomierz, mierzący powiedzmy z dokładnością do mikroNewtonów oraz marną linijkę, mierzącą z dokładnością do centymetra; oraz (ii) marny siłomierz, mierzący z dokładnością do Newtona oraz fantastyczną linijkę, mierzącą z dokładnością do mikrometrów. Jak należałoby mierzyć w tych przypadkach – blisko osi, gdzie zmierzona siła byłaby duża czy daleko od osi, gdzie odległość byłaby duża a siła mała. Proszę uzasadnić odpowiedź.